# בפרקים הקודמים

## משפט

תהי a נק. הצטברות של , אזי קיימת סדרה כך שלכל , אם כך ש

## הערה

תהי סדרה. אם b הינה נקודת הצטברות של הקבוצה אזי b הינו גבול חלקי של , אבל יתכן שb תהיה גבול חלקי של בלי להיות נקודת הצטברות של B.

## דוגמה

אין לB נקודות הצטברות, 1 וגם -1 הם גבולות חלקיים של

# הגדרה

תהי . נסמן את הקבוצה של נקודות הצטברות לE ב

# הגדרה

נגיד שE סגורה אם

## דוגמה

- לא סגורה, שכן לא מכילה את 0

- סגורה – אין נקודות הצטברות

– סגורה – אין נקודות הצטברות

לא סגורה – נקודות ההצטברות 0,1 לא מוכלות

– סגורה

# משפט

תהי E קבוצה לא ריקה, חסומה וסגורה, אזי יש לה מקסימום ומינימום.

# הוכחה

כיוון שE לא ריקה וחסומה, קיימים . מספיק להוכיח ש.

נוכיח ש – נניח שלא, אזי לכל קיים כך ש. לכל מצאנו איבר המקיים . ז"א שM הינה נקודת הצטברות של E בניגוד להנחה שE סגורה, לכן

# משפט

תהי . אזי תמיד סגורה.

## הוכחה

תהי ז"א נקודת הצטברות של ץ צ"ל , ז"א ש הינה נקודת הצטברות של E.

קיים כך ש. נתבונן בקטע כך  
ש. ברור *שכל נקודה שייכת לE, ומכאן שכל נקודת ב שייכת לE.*

טורים(Series)

# הגדרה

תהי סדרה. הסכום הפורמלי (האינסופי) נקרא טור.

# דוגמאות



# הגדרה

יהי טור. נתבונן בסדרה באשר לכל . לדוגמה:  
:   
:

נגיד שהטור מתכנס ושסכומו = S אם . אם לא מתכנסת אומרים שהטור מתבדר. אם מתבדר ל נכתוב

# דוגמה

1. , , לכן הטור מתבדר.
2. . אמנם
3. : לכן

# משפט

הטור מתכנס אם ורק אם לכל קיים N כך שעבור מתקיים

## הוכחה

התנאי שקול לתנאי שאם אזי ז"א ש תהיה סדרת קושי.

# משפט

אם (קרי מתכנס) אזי

## הוכחה

קח בתנאי קושי , אזי מתקיים ז"א ז"א

## הערה

ייתכן ש בלי ש מתכנסת. לדוגמה: אבל

# דוגמה

מתבדר.

### הוכחה

נוכיח שהתנאי של קושי לא מתקיים. קח . נתבונן ב ז"א קח :

טענה: . הכי קטן זה לכן

# דוגמה

מתכנס עבור ומתבדר עבור

### הוכחה

אם ברור ש ולכן מתבדר. נניח איפא ש. נוכיח שתנאי קושי מתקיים:

הערה:

# דוגמה

הוכח (דרך אגב: )

## הוכחה

תנאי קושי מתקיים: נתבונן ב ברור שזה קטן מ שקטן מ

# הגדרה

יהי טור. נקרא הm שארית או הm זנב של הטור

# משפט

א) אם מתכנס אזי מתכנס כל m-זנב גם כן ומתקיים

ב) אם קיים m כך ש, אזי הטור המקורי מתכנס.

## הוכחה

א) נסמן את הסכום החלקי הkי של ב. מתקיים . ולכן הוכחנו שאםום החלקי הנס.ת בה, אזי יש לה מקסימום ומינימום.

ב) במקרה זה מתקיים .

# מסקנות

שינוי של מספר סופי של איברים בטור, הוספת מספר סופי של איברים בטור, או גריעת מספר סופי של איברים מטור לא משפיע על התכנסות או התבדרות של הטור.

## הוכחה

שינוי: וקיים N כך שעבור מתקיים . ואז ברור שאם נסמן ב הm-זנב של וב הm-זנב של , אזי אם (שכן לכל )

הוספה: יהיו וסדרה המתקבלת מהוספה של איברים בהתחלה. נגיד שהוספנו k איברים. קיים N שעבור מתקיים . עבור מתקיים

גריעה: אותו דבר רק הפוך.